

# 山东省 2021 年普通高等教育专升本统一考试

## 高等数学 III 真题试卷

本试题分为第 I 卷和第 II 卷两部分。满分 100 分。考试用时 120 分钟。考试结束后，将本试题和答题卡一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、身份证号填写到试题规定的位置上，并将姓名、考生号、座号填（涂）在答题卡规定的位置。

2. 第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在本试卷上无效。

3. 第 II 卷答题必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定域内相应的位置；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

### 第 I 卷

一. 单选题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其选出并将答题卡的相应代码涂黑。错涂、多涂或未涂均无分。

1. 函数  $f(x) = \ln(2-x)$  的定义域为 ( )

A.  $[2, +\infty)$     B.  $(2, +\infty)$     C.  $(-\infty, 2]$     D.  $(-\infty, 2)$

2. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{2x} = 1$ , 则  $a = ()$

A. 0    B. 1    C. 2    D. 3

3. 当  $x \rightarrow 0$  时，以下函数为无穷小量的是 ( )

A.  $1 - \sqrt[3]{x}$     B.  $1 - e^x$     C.  $1 - \sin x$     D.  $1 - \tan x$

4. 已知函数  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x}$ , 则  $x=0$  是  $f(x)$  的 ( )

A. 可去间断点    B. 跳跃间断点    C. 无穷间断点    D. 连续点

5. 已知  $y = \tan 3x$ ,  $dy =$

A.  $3 \sec^2(3x) dx$     B.  $3 \tan(3x) \sec(3x) dx$     C.  $\sec^2(3x) dx$     D.  $\tan(3x) \sec(3x) dx$

6. 函数  $f(x) = e^x - 5x$  的单调递增区间为 ( )

A.  $(-\infty, \ln 5]$     B.  $(-\infty, \ln 5)$     C.  $[\ln 5, +\infty)$     D.  $(\ln 5, +\infty)$

7. 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{e^x} = 0$

A. 0    B. 1    C. 2    D.  $+\infty$

8. 已知  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , 则  $\int f(3x+2)dx = ()$

A.  $F(3x+2) + C$     B.  $3F(3x+2) + C$     C.  $\frac{1}{2}F(3x+2) + C$     D.  $\frac{1}{3}F(3x+2) + C$

9. 已知函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 且满足  $g(x) > f(x) > 0$ , 下列不成立的是 ()

A.  $\int_0^1 g^2(x)dx > \int_0^1 f^2(x)dx$     B.  $\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 g(x)dx$   
 C.  $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx < \int_0^1 \frac{1}{g(x)}dx$     D.  $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx > \int_0^1 \frac{1}{g(x)}dx$

10. 已知  $y = (2+x^2)^x$ , 则  $y' =$

A.  $(2+x^2)^x \left[ \ln(2+x^2) + \frac{2x^2}{2+x^2} \right]$     B.  $2x^2(2+x^2)^{x-1}$   
 C.  $\ln(2+x^2) + \frac{2x^2}{2+x^2}$     D.  $(2+x^2)^x \left[ \ln(2+x^2) + \frac{x}{2+x^2} \right]$

## 第 II 卷

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共计 15 分)

11. 已知  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ,  $g(x) = e^x$ , 则  $f[g(0)] =$  \_\_\_\_\_.

12. 若有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 2b_n) =$  \_\_\_\_\_.

13. 已知函数  $f(x) = 2^x + x + 3$ ,  $f''(x) =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知  $\int_0^2 f(x)dx = 2$ , 则  $\int_0^4 f(x)dx = 5$ , 则  $\int_4^2 f(x)dx =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x)$ , 则  $\frac{d}{dx} \int_0^x f(x-t)dt =$  \_\_\_\_\_.

三、计算题 (本大题共 7 小题, 每小题 6 分, 共计 42 分)

16. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2+2}{x^2+2x} - \frac{1}{x} \right)$

17. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 2b-e, & x = 0 \\ b + \ln(1+x^2), & x < 0 \end{cases}$ , 在点  $x=0$  处连续, 求实数  $a, b$  的值.

18. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^4}{x - \sin x}$ .

19. 求曲线  $y = \arctan(1+x)$  在点  $(0, \frac{\pi}{4})$  处的切线方程和法线方程

20. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $e^{x^2 y} = x - y$  所确定, 求  $y'$ .

21.求不定积分  $\int \frac{x-3}{x^2+1} dx$ .

22.求定积分  $\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}} dx$ .

四、应用题（本大题共 2 小题，第 23 小题 6 分，第 24 小题 7 分，共 13 分）

23.求曲线  $y = \sin x \left( \frac{\pi}{4} < x < \pi \right)$ ,  $y = \cos x \left( \frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi \right)$  与  $x$  轴所围成的图形的面积。

24.设  $k > 0$ , 求函数  $f(x) = 2 \ln(1+x) + kx^2 - 2x$  的极值点, 并判断是极大值还是极小值.

# 高等数学 III 真题参考答案及解析

一、单选选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 解析： $2-x > 0$ ，解得， $x < 2$ ， $\therefore x \in (-\infty, 2)$ ，选项 D 正确。

2. 解析：Q  $x \rightarrow 0, \sin f(x) \rightarrow 0, \sin f(x) \sim f(x)$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{2x} = \frac{a}{2} = 1, \therefore a = 2, \text{ 选项 C 正确。}$$

3. 解析：A 选项： $x \rightarrow 0$  时， $1 - \sqrt[3]{x} \rightarrow 1$ ；B 选项： $x \rightarrow 0$  时， $1 - e^x \rightarrow 0$

C 选项： $x \rightarrow 0$  时， $1 - \sin x \rightarrow 0$ ；D 选项： $x \rightarrow 0$  时， $1 - \tan x \rightarrow 1$ 。

选项 B 正确。

4. 解析： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^3-x} = \infty$ ， $\therefore x=0$  为  $f(x)$  的无穷间断点，选项 C 正确。

5. 解析： $y' = \sec^2(3x) \cdot 3 = 3\sec^2(3x)$ ， $dy = 3\sec^2 3x dx$ ，选项 A 正确。

6. 解析：定义域为  $\mathbb{R}$ ， $f'(x) = e^x - 5$ ，令  $f'(x) > 0$  得， $x > \ln 5$

所以，单增区间为  $[\ln 5, +\infty)$ ，选项 B 正确。

7. 解析：“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型，

$$\text{由洛必达法则得, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x-1}e^x} = 0$$

选项 A 正确。

8. 解析： $\int f(3x+2)dx = \frac{1}{3} \int f(3x+2)d(3x+2) = \frac{1}{3}F(3x+2) + C$ ，选项 D 正确。

9. 解析: 若在  $[a, b]$  上,  $f(x) \leq g(x)$ , 则  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

$$\therefore \text{C 选项: 在 } [0, 1] \text{ 上, } g(x) > f(x), \therefore \frac{1}{g(x)} < \frac{1}{f(x)},$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{g(x)} dx < \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$$

选项 C 正确。

10. 解析: 两边同时取对数得,  $\ln y = x \ln(2+x^2)$

$$\text{两边同时求导得, } \frac{1}{y} \cdot y' = \ln(2+x^2) + x \cdot \frac{2x}{2+x^2}$$

$$\text{整理得, } y' = y \left[ \ln(2+x^2) + \frac{2x^2}{2+x^2} \right]$$

$$\text{即, } y' = (2+x^2)^x \left[ \ln(2+x^2) + \frac{2x^2}{2+x^2} \right]$$

选项 A 正确。

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. 解析:  $g(0) = e^0 = 1$ ,  $\therefore f[g(0)] = f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

12. 解析:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 2b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 2b_n$   
 $= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$

13. 解析:  $f'(x) = 2^x \ln 2 + 1$

$$f''(x) = \ln 2 \cdot 2^x \ln 2 = 2^x \ln^2 2$$

14. 解析:  $\int_4^2 f(x)dx = \int_4^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$   
 $= \int_0^2 f(x)dx - \int_0^4 f(x)dx = 2 - 5 = -3$

15. 解析: 令  $u = x - t$ , 则  $t = x - u$ ,  $dt = -dx$

当  $t = 0$  时,  $u = x$ ; 当  $t = x$  时,  $u = 0$

$$\int_0^x f(x-t)dt = -\int_x^0 f(u)du = \int_0^x f(u)du$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \int_0^x f(x-t)dt = \frac{d}{dx} \int_0^x f(u)du = f(x)$$

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 6 分，共 42 分）

16. 解：  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2+2}{x^2+2x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2-(x+2)}{x(x+2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{x(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

17. 解：左极限  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [b + \ln(1+x^2)] = b$

右极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ (1+ax)^{\frac{1}{ax}} \right]^a = e^a$

$\ominus f(x)$  在  $x=0$  处连续,  $\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$

得  $\begin{cases} e^a = 2b - e \\ b = 2b - e \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} a = 1 \\ b = e \end{cases}$ .

18. 解：  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+x^4}{x-\sin x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+4x^3}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x+12x^2}{\sin x} = 6$$

19. 解：  $\ominus y' = \frac{1}{x^2+2x+2}$ ,

$$\therefore k = y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

由此得切线方程为：  $y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}x$ , 即  $x - 2y + \frac{\pi}{2} = 0$

法线方程为:  $y - \frac{\pi}{4} = -2x$ , 即  $2x + y - \frac{\pi}{4} = 0$ 。

20. 解: 方程两边对  $x$  求导得,

$$e^{x^2 y} (2xy + x^2 y') = 1 - y'$$

$$\text{解得 } y' = \frac{1 - 2xye^{x^2 y}}{1 + x^2 e^{x^2 y}}$$

21. 解:  $\int \frac{x-3}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{3}{x^2+1} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2+1} d(x^2+1) - 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx$$
$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 3 \arctan x + C。$$

22. 解: 令  $\sqrt{x-1} = t$ , 则  $x = 1+t^2$ ,  $dx = 2tdt$

当  $x = 1$  时,  $t = 0$ ; 当  $x = 2$  时,  $t = 1$ 。

$$\int_1^2 e^{\sqrt{x-1}} dx = 2 \int_0^1 e^t t dt = 2 \left( te' \Big|_0^1 - \int_0^1 e' dt \right) = 2e - 2e' \Big|_0^1 = 2$$

四、应用题 (本大题共 2 小题, 第 23 小题 6 分, 第 24 小题 7 分, 共 13 分)

23. 解:  $S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}$

24. 解: 函数  $f(x)$  的定义域为  $(-1, +\infty)$ , 求导得,

$$f'(x) = \frac{2x(kx+k-1)}{1+x}$$

令  $f'(x) = 0$ , 即  $2x(kx+k-1) = 0$  得驻点

$$x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{k} - 1.$$

(1) 当  $k = 1$  时

$$\ominus f'(x) = \frac{2x^2}{1+x} \geq 0, \therefore f(x) \text{ 无极值点}$$



(2) 当  $0 < k < 1$  时,  $x_2 > x_1$

$x$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, \frac{1}{k}-1)$	$\frac{1}{k}-1$	$(\frac{1}{k}-1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$x_1 = 0$  是  $f(x)$  的极大值点;  $x_2 = \frac{1}{k} - 1$  是  $f(x)$  的极小值点。

(3) 当  $k > 1$  时,  $x_2 < x_1$

$x$	$(-1, \frac{1}{k}-1)$	$\frac{1}{k}-1$	$(\frac{1}{k}-1, 0)$	$0$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$x_1 = 0$  是  $f(x)$  的极小值点;  $x_2 = \frac{1}{k} - 1$  是  $f(x)$  的极大值点。